UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO

Maestría en Ciencias de la Complejidad

Guía para preparar la evaluación diagnóstica

(Opción A)

Última revisión: Semestre 2015-I

Índice

1. Temarios **5**

1.1. Cálculo diferencial e integral de varias variables 5
1.1.1. Bibliografía 6
1.2. Álgebra superior y lineal 7
1.2.1. Bibliografía 9
1.3. Análisis matemático 10
1.3.1. Bibliografía 12
1.4. Ecuaciones diferenciales ordinarias 12
1.4.1. Bibliografía 13
1.5. Probabilidad 14
1.5.1. Bibliografía 14

2. Ejercicios propuestos **16**

2.1. Cálculo diferencial e integral de varias variables 16
2.2. Álgebra superior y lineal 21
2.3. Análisis matemático 25
2.4. Ecuaciones diferenciales ordinarias 26
2.5. Probabilidad 29

3. Algunos ejemplos de evaluaciones diagnósticas **32**

Presentación

El programa de la Maestría en Ciencias de la Complejidad (MCC) tiene el propósito de desarrollar, en los profesionistas que se formen en él, aptitudes para la investigación en las ciencias de la complejidad. Los temas de investigación que se abordan en la actualidad desde este enfoque abarcan una amplia variedad de campos del conocimiento pertenecientes a las áreas físico-matemáticas, químico-biológicas, sociales-administrativas e inclusive humanísticas.

Dado el marcado carácter interdisciplinario de las investigaciones realizadas en sistemas complejos, la MCC cuenta con dos especializaciones: la denominada *Opción A,* que está dirigida a profesionistas con una formación matemática equivalente a la que proporcionan licenciaturas en ciencias e ingenierías, y la *Opción B*, diseñada para profesionistas que cuentan con una formación matemática menos rigurosa, pero que poseen sólidos conocimientos matemáticos a nivel de bachillerato.

La presente guía está elaborada para auxiliar a los aspirantes interesados en ingresar a la *Opción A* de la MCC, y ha sido diseñada con un propósito doble: por una parte dar a conocer el tipo de conocimientos matemáticos que el aspirante debe poseer a su ingreso para poder afrontar exitosamente el plan de estudios de este posgrado; y por otra, ser un instrumento de apoyo en la preparación de la *evaluación diagnóstica*.
La guía incluye un bosquejo de los temarios de materias como cálculo de varias variables, álgebra superior y lineal, análisis matemático, ecuaciones diferenciales ordinarias y probabilidad. Si bien estos temarios se han diseñado tomando en cuenta diversos libros de texto y programas de estudios, el criterio fundamental para su elaboración ha sido seleccionar sólo aquellos contenidos que el estudiante debe saber para ingresar a la maestría. Cada uno de estos temarios viene acompañado de una bibliografía básica y actualizada, integrada en su mayor parte por libros que pueden ser consultados en las bibliotecas de los planteles Del Valle y Centro Histórico de la UACM. Asimismo, esta guía está integrada por un número significativo de ejercicios representativos de tales materias y que son del tipo de los que podrían constituir la evaluación diagnóstica; las respuestas de estos ejercicios, y las de otros similares, pueden consultarse en las referencias bibliográficas sugeridas. Al final de la guía se han agregado dos ejemplos de evaluaciones diagnósticas construidas con algunos de los ejercicios propuestos.

La *evaluación diagnóstica* además de contener un apartado para la resolución de problemas matemáticos, también contiene otro dedicado a la comprensión de textos en el idioma inglés. Con ello, se pretende explorar la habilidad que posee el aspirante para comprender en este idioma desde textos técnicos hasta ensayos filosóficos. Los dos ejemplos de evaluaciones diagnósticas del final de la guía contienen una sección con ejercicios de este tipo. Cabe mencionar que sólo la satisfactoria resolución de las secciones de problemas matemáticos y la de comprensión de textos en inglés le permitirá al aspirante inscribirse directamente en la MCC.

Por último, la *evaluación diagnóstica* se ha diseñado de manera que sea autocontenida; es decir, que además de incorporar una serie de problemas representativos de los contenidos de los programas de las materias ya señaladas, también presente la información que se requiera para resolverlos, como pudiera ser el enunciado de ciertos teoremas, de fórmulas o identidades matemáticas. De esta manera, el aspirante sólo requerirá para contestar la evaluación de tan sólo lápiz, papel y si acaso, de una calculadora. Se le sugiere al aspirante que en las soluciones que proponga de los ejercicios, exprese con toda claridad y orden sus ideas, que indique las operaciones que efectúe y los conceptos matemáticos que utilice. El tiempo estimado para resolver la evaluación diagnóstica, no debe exceder de tres horas.

Mayo de 2015

1. Temarios

1.1. Cálculo diferencial e integral de varias variables

1. Vectores y geometría analítica del espacio
    (a) Sistemas de coordenadas en tres dimensiones
    (b) Vectores
    (c) Producto punto o escalar
    (d) Producto cruz o vectorial
    (e) Ecuaciones de rectas y planos
    (f) Cilindros y superficies cuadráticas
    (g) Coordenadas cilíndricas y esféricas
2. Funciones vectoriales
    (a) Funciones vectoriales
    (b) Límite de una función vectorial
    (c) Derivadas e integrales de funciones vectoriales
    (d) Longitud de arco y curvatura
    (e) Movimiento en el espacio: velocidad y aceleración
3. Cálculo diferencial de funciones de más de una variable
    (a) Funciones de más de una variable
    (b) Límites y continuidad
    (c) Derivadas parciales
    (d) Regla de la cadena
    (e) Derivadas parciales de orden superior
    (f) El teorema de Taylor
4. Derivadas direccionales, gradientes y aplicaciones de las derivadas parciales
    (a) Derivadas direccionales y vector gradente
    (b) Tangentes y normales a superficies
    (c) Valores extremos de funciones con valores reales
    (d) Multiplicadores de Lagrange
    (e) El teorema de la función inversa
    (f) El teorema de la función implícita

5. Integración múltiple
    (a) Integrales dobles sobre rectángulos
    (b) Integrales iteradas o sucesivas
    (c) Integrales dobles sobre regiones generales
    (d) Integrales dobles en coordenadas polares
    (e) Aplicaciones de las integrales dobles: centro de masa y momentos de inercia
    (f) Área de una superficie
    (g) Integrales triples
    (h) Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas
    (i) Cambio de variables en integrales múltiples
6. Cálculo vectorial
    (a) Campos vectoriales
    (b) La integral de trayectoria
    (c) Integrales de línea
    (d) Teorema fundamental para integrales de línea
    (e) Campos conservativos. Integrales independientes de la trayectoria
    (f) Teorema de Green
    (g) Rotacional y divergencia
    (h) Superficies parametrizadas y sus áreas
    (i) Integrales de superficie
    (j) Teorema de Stokes
    (k) Teorema de Gauss o de la divergencia

1.1.1. Bibliografía

1. L. Leithold, *El Cálculo*, 7^a edición (Oxford University Press, México, 1998).
2. J. Stewart, *Cálculo,* Cuarta edición (Thomson-Learning, México, 2002).
3. J. E. Marsden y A. J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, 4^a edición (Pearson Educación, México, 1998).
4. W. C. McCallum, A. M. Gleason, D. Hughes-Hallett, et al., *Cálculo de Varias Variables* (CECSA, México, 1998).
5. T. H. Barr, *Vector Calculus*, 2^{nd} edition (Prentice Hall, USA, 2001).
6. C. Pita Ruíz, *Cálculo Vectorial*, 1^a edición (Prentice Hall, México, 1995).

7. M. R. Spiegel, *Análisis Vectorial*, Serie Schaum (McGraw Hill, México, 1989).

8. T. M. Apostol, *Calculus Vol. 2* Segunda edición (Reverté, Barcelona, 2001).

9. R. Courant y F. John, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol.2* (Limusa, México, 1987).

1.2. Álgebra superior y lineal

1. Sistemas de ecuaciones lineales
   (a) Ecuaciones lineales y su solución
   (b) Sistemas de ecuaciones lineales
   (c) Transformaciones elementales
   (d) El método de Gauss-Jordan
   (e) Sisitemas de ecuaciones homogéneos
2. Matrices
   (a) Conceptos generales
   (b) Adición de matrices y multiplicación por un escalar
   (c) Multiplicación de matrices
   (d) Inversa de una matriz
   (e) Matrices y ecuaciones lineales
   (f) Tipos especiales de matrices cuadradas
   (g) Operaciones sobre una matriz
      1. Transposición
      2. Matrices simétricas y antisimétricas
      3. Conjugación
      4. Potencia enésima
   (h) Partición de matrices
3. Determinantes
   (a) Definición y conceptos básicos
   (b) Permutaciones
   (c) Propiedades
   (d) Menores y cofactores
   (e) Algunas aplicaciones

    1. Cálculo de la inversa de una matriz por medio de la adjunta
    2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la regla de Kramer

4. Espacios vectoriales

   (a) Definición y propiedades básicas
   (b) Subespacios
   (c) Combinación lineal y espacio generado
   (d) Independencia lineal
   (e) Bases y dimensión
   (f) Rango, nulidad, espacio de los renglones y espacio de las columnas de una matriz
   (g) Cambio de base
   (h) Bases ortonormales y proyecciones en $\mathbb{R}^n$
   (i) Dependencia lineal, base y dimensión
   (j) Espacios con producto interno y proyecciones

5. Transformaciones lineales

   (a) Transformación lineal
   (b) Dominio, codominio, recorrido y núcleo
   (c) Representación matricial de una transformación lineal
       1. Matriz asociada
       2. Matriz referida a dos bases cualesquiera
       3. Rango de la matriz asociada y dimensión del recorrido
   (d) Álgebra de las transformaciones lineales
       1. Adición y multiplicación por un escalar
       2. Composición
       3. Inversa de una transformación

6. Eigenvalores, eigenvectores y fórmas canónicas

   (a) Eigenvaores y eigenvectgores
   (b) Matrices semejantes y diagonalización
   (c) Matrices simétricas y diagonalización ortogonal
   (d) Formas cuadráticas y secciones cónicas
   (e) Forma canónica de Jordan
   (f) Teorema de Cayley-Hamilton

7. Numeros complejos
   (a) Definición y propiedades
   (b) Operaciones fundamentales
   (c) Representación rectangular
   (d) Adición y sustracción geométrica
   (e) Representación polar
   (f) Producto y cociente de números complejos
   (g) Teorema de Moivre
   (h) Potencias y raíces de números complejos
8. Teoría de ecuaciones polinomiales de grado superior
   (a) La ecuación de tercer grado
   (b) La ecuación de cuarto grado
   (c) Ecuaciones racionales enteras
   (d) Teorema del residuo
   (e) Teorema del factor y su recíproco
   (f) División sintética
   (g) Gráfica de un polinomio
   (h) Número de raíces
   (i) Naturaleza de las raíces
   (j) Regla de los signos de Descartes
   (k) Raíces racionales, irracionales e imaginarias
   (l) Cálculo aproximado de las raíces. Método de Horner
   (m) Relaciones entre las raíces y los coeficientes

1.2.1. Bibliografía

(a) A. G. Kurosch, *Curso de Álgebra Superior* (Mir-Limusa, México, 1994).

(b) A. I. Kostrinkin, *Introducción al Álgebra*, 2^a edición (McGraw-Hill, España, 1992).

(c) A. Reyes Guerrero, Álgebra Ssuperior (Thomson, México, 2005).

(d) S. I. Grossman, *Álgebra lineal,* Quinta edición (McGraw-Hill, México, 1996).

(e) S. J. Leon, *Linear Algebra whit Applications*, Sixth edition (Prentice Hall, USA, 2002).

(f) T. Banchoff and J. Wermer, *Linear Algebra Through Geometry* (Springer-Verlag, USA, 1992).

(g) H. Anton, *Introducción al Álgebra Lineal*, 2^a edición (Limusa-Wiley, México, 2002).

(h) K. Hoffman y R. Kunze, *Álgebra Lineal* (Prentice Hall, México, 1973)

(i) S. Lipschutz, *Álgebra Lineal*, Segunda edición (McGraw-Hill, España, 1992)

(j) B. Kolman, *Álgebra Lineal con Aplicaciones y MATLAB*, Sexta edición (Prentice Hall, México, 1999).

1.3. Análisis matemático

(a) Los sistemas de los números reales y los complejos

1. Conjuntos ordenados
2. Campos
3. El campo real
4. El sistema de los números reales extendido
5. El campo complejo
6. Espacios euclidianos

(b) Topología básica

1. Conjuntos finitos, numerables y no numerables
2. Espacios métricos
3. Conjuntos compactos
4. Conjuntos perfectos
5. Conjuntos conexos

(c) Sucesiones y series

1. Sucesiones convergentes
2. Subsucesiones
3. Sucesiones de Cauchy
4. Límites inferior y superior
5. Algunas sucesiones especiales
6. Series
7. Series de términos no negativos
8. El número e
9. Criterios del cociente y de la raíz
10. Series de potencias
11. Sumatoria por partes
12. Convergencia absoluta
13. Adición y multipliccación de series
14. Reordenación de series

(d) Continuidad

1. Límites de funciones
2. Funciones continuas
3. Continuidad y compacticidad
4. Continuidad y conectividad
5. Discontinuidades
6. Funciones monótonas
7. Límites infinitos y en el infinito

(e) Diferenciación

1. La derivada de una función real
2. Teoremas del valor medio
3. La continuidad de las derivadas
4. La regla de L'Hospital
5. Derivadas de orden superior
6. Teorema de Taylor
7. Diferenciación de funciones vectoriales

(f) La integral de Riemann-Stieljes

1. Definición y existencia d ela integral
2. Propiedades de la integral
3. Integración y diferenciación
4. Integración de funciones vectoriales
5. Curvas rectificables

(g) Sucesiones y series de funciones

1. Discusión del problema principal
2. Convergencia uniforme
3. Convergencia uniforme y continuidad
4. Convergencia uniforme e integración
5. Convergencia uniforme y diferenciación
6. Familias de funciones equicontinuas
7. El teorema de Stone-Weierstrass

(h) Algunas funciones especiales

1. Series de potencias
2. Las funciones exponencial y logarítmica
3. Las funciones trigonométricas
4. la completez algebraica del campo complejo
5. Series de Fourier
6. La función Gamma

1.3.1. Bibliografía

(a) W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis,* Third edition (McGraw-Hill, USA, 1972).

(b) T. M. Apostol, *Análisis Matemático,* Segunda edición (Reverté, Barcelona, 2002).

(c) R. Courant y F. John, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol.1* (Limusa, México, 1987).

(d) A. Wawrzynczyk y J. Delgado, *Introducción al Análisis.* Libros de texto y manuales de práctica (UAM-Iztapalapa, México, 1993).

(e) F. Galaz Fontes, *Introducción al Análisis Matemático. Cálculo Avanzado I.* Libros de Texto y Manuales de Práctica (UAM-Iztapalapa, México, 1992).

(f) S. Abbott, *Understanding Analysis* (Springer, USA, 2001).

(g) R. G. Bartle and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, Third edition (John Wiley, USA, 2000).

(h) R. G. Bartle, *Introducción al Análisis Matemático* (Limusa, México, 1987).

(i) G. N. Yákovliev, *Álgebra y Principios del Análisis* (Mir, Moscú, 1984).

1.4. Ecuaciones diferenciales ordinarias

(a) Ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Modelación por medio de ecuaciones diferenciales
2. Procedimiento analítico: separación de variables
3. Procedimiento cualitativo: campos de pendientes
4. Técnica numérica: método de Euler
5. Existencia y unicidad de las soluciones
6. Equilibrios y líneas de fase
7. Bifurcaciones
8. Ecuaciones diferenciales lineales
9. Cambio de variables

(b) Sistemas de primer orden

1. Modelación por medio de sistemas
2. Geometría de sistemas
3. Métodos analíticos para sistemas especiales
4. Método de Euler para sistemas
5. Ecuaciones de Lorenz

(c) Sistemas lineales

1. Propiedades de sistemas lineales y el principio de linealidad
2. Soluciones de línea recta
3. Planos fase para sistemas lineales con eigenvalores reales
4. Eigenvalores complejos
5. Casos especiales: eigenvalores repetidos y cero
6. Ecuaciones lineales de segundo orden
7. El plano traza-determinante
8. Sistemas lineales tridimensionales

(d) Métodos numéricos

1. Errores numéricos en el método de Euler
2. Cómo mejorar el método de Euler
3. El método de Runge-Kutta
4. Los efectos de la aritmética finita

1.4.1. Bibliografía

(a) P. Blanchard, R. L. Devaney y G. R. Hall, *Ecuaciones Diferenciales* (Thomson Learning, México, 1999).

(b) R. L. Borrelli y C. S. Coleman, *Ecuaciones Diferenciales, Una Perspectiva de Modelación* (Oxford University Press, México, 2002).

(c) D. G. Zill, *A First Course in Differential Equations,* 5^{th} edition (Thomson Learning, USA, 2001).

(d) D. G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones a Modelado*, 7^{a} edición (Thomson Learning, México, 2002).

(e) C. H. Edwards and D. E. Penney, *Diferential Equations aqnd Boundary Value Problems, Computing and Modeling,* 3^{rd} edition (Pearson Education, USA, 2004).

(f) C. H. Edwards and D. E. Penney, *Diferential Equations, Computing and Modeling,* 2^{nd} edition (Prentice Hall, USA, 2001).

(g) M. Golubitsky y M. Dellnitz, *Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales, con uso de MATLAB* (Thomson Learning, México, 1999).

(h) J. H. Davis, *Differential Equations with MAPLE, An Interactive Approach* (Birkhäuser, Boston, 2002).

(i) I. Carmona Jover, *Ecuaciones Diferenciales* (Addison Wesley Longman, México, 1998).

(j) R. K. Nagle, E. B. Saff y A. D. Snider, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, 3^{a} edición (Pearson Education, México, 2001).

(k) W. E. Boyce y R. C. DiPrima, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera* (Limusa Wiley, México, 2003).

1.5. Probabilidad

(a) La probabilidad de un suceso

1. El concepto de probabilidad
2. Sucesos seguros e imposibles

(b) El teorema de la suma de probabilidades

1. Deducción del teorema
2. Juegos completos de probabilidades
3. Ejemplos

(c) Probabilidades condicionales y teorema del producto

1. El concepto de probabilidad condicional
2. Deducción del teorema
3. Sucesos independientes

(d) Consecuencias de los teoremas de la suma y del producto

1. Deducción de ciertas desigualdades
2. Fórmula de probabilidad total
3. Fórmula de Bayes

(e) El esquema de Bernoulli

1. Ejemplos
2. Fórmulas de Bernoulli
3. El número más probable de ocurrencias de un suceso

(f) Teorema de Bernoulli

1. Significado del teorema
2. Demostración del teorema

(g) Aproximaciones de Poisson y de Laplace-de Moivre

(h) Teorema del límite central de Chebyshev

1. Implicaciones para la estadística
2. Conciliación entre las definiciones axiomática, clásica y frecuentista de probabilidad

1.5.1. Bibliografía

(a) B. V. Gnedenko and A. Y. Khinchin, *Elementary introduction to the Theory of Probability* (Dover, New York, 1962).

(b) S. M. Ross, *A First Course in Probability*, 5^{th} edition (Prentice Hall, USA, 1998).

(c) P. M. Wisniewski y G. Bali, *Ejercicios y Problemas de Teoría de Probabilidades* (Trillas, México, 1998).

(d) B. R. Pérez Salvador, A. Castillo Animas y S. de los Cobos Silva, *Introducción a la Probabilidad* (UAM-Iztapalapa, México, 2000).

(e) O. A. Rascón Ch., *Introducción a la Teoría de Probabilidades* (UNAM, México, 1988).

(f) S. Fuenlabrada, *Probabilidad y Estadística* (McGraw Hill, México, 2004).

(g) M. H. DeGroot, *Probabilidad y Estadística* (Addison Wesley Iberoamericana, USA, 1988).

2. Ejercicios propuestos

2.1. Cálculo diferencial e integral de varias variables

(a) Encuentre

1. el vector unitario en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = 2\widehat{i} - \widehat{j} - 2\widehat{k}$;
2. los ángulos directores del vector $\overrightarrow{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$;
3. el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ y $\overrightarrow{b} = \langle 5, -3, 2 \rangle$;
4. la proyección escalar y el vector de proyección de $\overrightarrow{q} = \langle 1, 1, 2 \rangle$ sobre $\overrightarrow{p} = \langle -2, 3, 1 \rangle$;
5. el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ y $\overrightarrow{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$; y
6. mediante el producto escalar triple, que los vectores $\overrightarrow{a} = \langle 1, 4, -7 \rangle$, $\overrightarrow{b} = \langle 2, -1, 4 \rangle$ y $\overrightarrow{c} = \langle 0, -9, 18 \rangle$ son coplanares.

(b) Encuentre la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas

1. para la recta que pasa por el punto $(5, 1, 3)$ y es paralela al vector $\overrightarrow{v} = \widehat{i} + 4\widehat{j} - 2\widehat{k}$.
2. Encuentre otros dos puntos de la recta.

(c) Halle las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta

1. que pasa por los puntos $A(2, 4, -3)$ y $B(3, -1, 1)$.
2. ¿En qué punto corta esta recta al plano xy?

(d) Encuentre una ecuación del plano

1. que pasa por el punto $(2, 4, -1)$ con vector normal $\overrightarrow{n} = \langle 2, 3, 4 \rangle$, las coordenadas de los puntos en los que intersecta a los ejes coordenados y su gráfica;.y
2. del que pasa por los puntos $P(1, 2, 3)$, $Q(3, -1, 6)$ y $R(5, 2, 0)$.

(e) Encuentre

1. el ángulo entre los planos
$$x + y + z = 1 \qquad \text{y} \qquad x - 2y + 3z = 1,$$
y ecuaciones simétricas para la recta formada por la intersección de estos dos planos; y
2. la distancia entre los planos paralelos
$$10x + 2y - 2z = 5 \qquad \text{y} \qquad 5x + y - z = 1.$$

(f) Identifique y trace las superficies

1. $$z = x^2,$$

2. $$x^2 + y^2 = 1.$$

(g) Mediante el empleo de las trazas, grafique las superficies cuadráticas siguientes:

1. $$x^2 + \frac{1}{9}y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1.$$

2. $$z = 4x^2 + y^2,$$

3. $$\frac{1}{4}x^2 + y^2 - + \frac{1}{4}z^2 = 1.$$

(h) Encuntre la ecuación,

1. en coordenadas cilídricas del elipsoide
$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1;$$

2. y en coordenadas esféricas, del hiperboloide de dos hojas con ecuación
$$x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

(i) Dada la función vectorial

1. $$\overrightarrow{r}(t) = \cos t\widehat{i} + sent\widehat{j} + t\widehat{k},$$
trace su curva;

2. y para
$$\overrightarrow{r}(t) = \left(1 + t^3\right)\widehat{i} + te^{-t}\widehat{j} + \frac{sent}{t}\widehat{k},$$
calcule el $\lim_{t\to 0}\overrightarrow{r}(t)$.

(j) Dada la función vectorial

1. $$\overrightarrow{r}(t) = \left(1 + t^3\right)\widehat{i} + te^{-t}\widehat{j} + sen2t\widehat{k},$$
encuentre su derivada y halle el vector tangente unitario en el punto donde $t = 0$;

2. en tanto que para la parábola semicúbica
$$\overrightarrow{r}(t) = \left\langle 1 + t^3, t^2 \right\rangle,$$
determine si es suave.

(k) Si $\overrightarrow{r}(t) \neq \overrightarrow{0}$, demuestre que

$$\frac{d}{dt}\left|\overrightarrow{r}(t)\right| = \frac{1}{\left|\overrightarrow{r}(t)\right|}\overrightarrow{r}(t)\cdot\overrightarrow{r}'(t).$$

Sugerencia: $\left|\overrightarrow{r}(t)\right|^2 = \overrightarrow{r}(t)\cdot\overrightarrow{r}(t)$.

(l) Calcule las integrales

1. $$\int_0^{\pi/4}\left(\cos 2t\widehat{i} + sen2t\widehat{j} + tsent\widehat{k}\right)dt,$$
2. $$\int\left(e^t\widehat{i} + 2t\widehat{j} + \ln t\widehat{k}\right)dt.$$

(m) Dada la ecuación vectorial de la hélice circular

$$\overrightarrow{r}(t) = \cos t\widehat{i} + sent\widehat{j} + t\widehat{k}.$$

1. Halle su longitud de arco desde el punto $(1,0,0)$ al punto $(1,0,2\pi)$.
2. Reparametrícela con respecto a la longitud de arco medido desde $(1,0,0)$ en la dirección creciente de t.

(n) Halle la curvatura

1. de la cúbica alabeada
$$\overrightarrow{r}(t) = \left\langle t.t^2, t^3\right\rangle$$
en un punto general y en $(0,0,0)$;
2. de la parábola $y = x^2$ en los puntos $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,4)$.

(ñ) Para la hélice circular

$$\overrightarrow{r}(t) = \cos t\widehat{i} + sent\widehat{j} + t\widehat{k},$$

1. halle los vectores normal y binormal, y
2. las ecuaciones del plano normal y del plano osculador en el punto $P(0,1,\pi/2)$.

(o) Un proyectil se dispara con un ángulo agudo de elevación α respecto de la horizontal y con velocidad inicial $\overrightarrow{v}_0$. Despreciando la resistencia del aire, la única fuerza externa que actúa sobre él se debe a la gravedad.

1. Encuentre la función de posición $\overrightarrow{r}(t)$ del proyectil.
2. ¿Qué valor de α hace máximo el alcance (la distancia horizontal recorrida)?

(p) Una partícula se desplaza de acuerdo con la función de posición

$$\overrightarrow{r}(t) = \left\langle t^2.t^2, t^3 \right\rangle.$$

Halle las componentes tangencial y normal de su aceleración.

(q) Dada la función de varias variables

$$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

1. Encuentre su dominio e imagen.
2. Grafíquela en el espacio.
3. Trace sus curvas de nivel, para $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

(r) Muestre que

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

   no existe; en tanto que

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$$

   si existe, y es igual a cero.

(s) Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} sen(xy), & \text{si } x \neq 0 \\ y, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcule, en caso de que existan, los limites

1. $$\lim_{x\to 0} \left[\lim_{y\to 0} f(x,y) \right],$$
2. $$\lim_{y\to 0} \left[\lim_{x\to 0} f(x,y) \right],$$
3. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

(t) Determine en dónde son continuas las siguientes funciones

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3.

$$h(x,y) = \arctan(y/x).$$

(u) Demuestre que

1. la función

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

es solución de la ecuación de Laplace en tres dimensiones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

2. y que la función

$$u(x,t) = sen(x - at)$$

satisfacela ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

(v) Halle la derivada parcial indicada

1.

$$z = \ln[sen(x-y)], \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2};$$

2.

$$u = x^a y^b z^c, \qquad \frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}.$$

(w) Si

$$u = x^4 y + y^2 z^3$$

donde

$$x = rse^t, \quad y = rs^2e^{-t}, \quad z = r^2 s\ sent,$$

encuentre el valor de $\partial u/\partial s$.

(x) Suponga que la ecuación

$$y^2 + xz + z^2 - e^z - c = 0$$

define a z como función de x y y, sea ésta $z = f(x,y)$.

1. Halle un valor de la constante c para el cual $f(0,e) = 2$, y
2. calcule las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en el punto $(x,y) = (0,e)$.

(y) Dada la función

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2xyz + senx)\,\widehat{\imath} + x^2 z\,\widehat{\jmath} + x^2 y\,\widehat{k},$$

Halle una función f tal que $\overrightarrow{F} = \nabla f$.

(z) Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$$

en el rectángulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3,\, 0 \leq y \leq 2\}$.

() Dada la función

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \left(xy, y^2\right).$$

Si σ es la trayectoria $y = 2x^2$ que une $(0, 0)$ con $(1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$, evalúe $\int_\sigma \overrightarrow{F}$. ¿Depende la integral calculada en el inciso anterior de la trayectoria que une $(0, 0)$ con $(1, 2)$?

() Encuentre los valores extremos dela función

$$f(x, y) = x^2 + 2y$$

en el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

() Dada la función

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = xy^2\widehat{\imath} + x^2y\widehat{\jmath} + y\widehat{k},$$

Si S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 < z < 1$ y $x^2 + y^2 \leq 1$ cuando $z = \pm 1$, calcule $\int_S \overrightarrow{F}$. En vez de calcular directamente la integral, use el teorema de la divergencia.

2.2. Álgebra superior y lineal

(a) Mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan, resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0. \end{aligned}$$

(b) Se tienen las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Efectúe las siguientes operaciones, cuando sea posible.

1. AB,
2. $A + B$,
3. $A + C$,

4. $(A+C)B$,
5. $B(A+C)$.

(c) Verifique la ley asociativa $A(BC) = (AB)\,C$ del producto para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(d) Verifique la ley distributiva $A(B+C) = AB + AC$ para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Sean a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} números reales dados tales que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Encuentre los números b_{11}, b_{12}, b_{21} y b_{22} tales que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calcule A^{-1} y B^{-1}si existen.
2. Halle la transpuesta de ambas.
3. Determine A^2 y B^3.

(g) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Escriba a A como el producto de matrices elementales poruna matriz triangular superior.

(h) Para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calcule $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$ y $\det(A)\det(B)$. Compare el resultado de $\det(AB)$ con $\det(A)\det(B)$, ¿son igualeso diferentes?

(i) Calcule el determinante de cuarto orden

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

(j) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= 4. \end{aligned}$$

empleando la regla de Kramer.

(k) En los siguientes incisos determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. Si no lo es, enuncie los axiomas que no se cumplen.

1. El conjunto delas matrices diagonales de $n \times n$ bajo la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales.
2. $\{(x, y) \mid y \leq 0;\ x, y \in \mathbb{R}\}$.
3. El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que están sobrela recta $x = t + 1$, $y = 2t$, $z = t - 1$.

(l) Considere la ecuación diferencialde segundo orden homogénea

$$y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 0$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas. Demuestre que el conjunto de soluciones dela ecuación es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para la suma de funciones y multiplicación por un escalar.

(m) En los incisos siguientes determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V.

1. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y) \mid y \geq 0\}$.
2. $V = M_{nn}$; $H = \{S \in M_{nn} \mid S \text{ es simétrica}\}$.
3. $V = P_n$; $H = \{p \in P_n \mid p(0) = 1\}$.

(n) Sea $H = \{(x, y, z, w) \mid ax + by + cz + dw = 0\}$, donde a, b, c y d son números reales, no todos cero. Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^4$. H se llama un *hiperplano* en $\mathbb{R}^4$ que pasa por el origen.

(ñ) Determine si los siguientes conjuntos de vectores dados generan el espacio vectorial indicado.

1. En $\mathbb{R}^3$: $(1,-1,2)\,,\,(1,1,2)\,,\,(0,0,1)\,,$
2. En P_2: $1-x,\,3-x^2.$

(o) Establezca si los siguientes conjuntos de vectores dados son linealmente dependientes o independientes.

1. En P_2: $1-x,\,x.$
2. En $C\,[0,1]$: $senx,\,cosx.$
3. En P_3: $2x,\,x^3-3,1+x-4x^3,\,x^3+18x-9.$

(p) ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores $(1,2,3)\,,$ $(2,-1,4)\,,\,(3,\alpha,4)$?

(q) Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores localizados en el plano

$$2x-y-z=0.$$

(r) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcule sus eigenvalores y eigenvectores.

(s) Encuentre la representación matricial (en la base canónica), así como el núcleo, imagen, rango y nulidad, de las transformaciones

1. $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, definida como

$$T\left(\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & w \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} x-2z, & 2y+3w \end{array}\right),$$

2. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definida como

$$T\left(\begin{array}{cc} x, & y \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 0, & -y \end{array}\right).$$

(t) Encuentre la representación matricial de la transformación $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y-3z \end{pmatrix},$$

en las bases $B_1=\{(1,0,1)\,,(1,1,0)\,,(1,1,1)\}$ y $B_2=\{(1,-1)\,,(2,3)\}\,.$

(u) Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, una transformación definida por una rotación negativa de $\pi/4$ respecto al origen, después una expansión a lo largo del eje x por un factor de 2 y una expansión a lo largo del eje y por un factor de 3, seguidas de una rotación positiva de $\pi/4$ respecto al origen.

1. Encuentre la representación matricial de T respecto a la base canónica.

2. Encuentre la representación matricial de T respecto a la base $B = \{(1,1), (-1,1)\}$.
3. Explique la manera en que se puede describir la geometría de T únicamente en términos de expansiones en ciertas direcciones.

(v) Expresa en la forma $a + ib$ las raíces de

$$(-1+i)^{\frac{1}{3}},$$

y exprésalas gráficamente en el plano complejo.

(w) Encuentre una expresión general para

$$\left[1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right]^n.$$

(x) Resuelva

1. la ecuación cúbica
$$x^3 - 9x^2 - 9x - 15 = 0;$$
2. y calcule la cúbica resolvente de
$$x^4 - 10x^2 + 16x + 5 = 0.$$

2.3. Análisis matemático

(a) Exprese en *n-ésimo* término de las siguientes sucesiones mediante una fórmula que dependa de n.

1. $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...$;
2. $\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{4}{5}, 0, ...$.

(b) Demuestre el siguiente resultado: Si a es cualquier número distinto de cero y

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

entonces f es continua en a.

(c) Demuestre que si $|r| < 1$, la sucesión $\{r^n\}$ es convergente y que r^n converge a cero.

(d) Pruebe que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(e) Supongamos que f es una función continua en $[a, b]$ y que tiene dos mínimos locales, uno en c y otro en d, con $c < d$. Pruebe que f tiene un máximo local en un punto entre c y d.

(f) Pruebe que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

(g) Supongamos que $0 < x_1 < 1$. Definimos la sucesión $\{x_n\}$ mediante

$$x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}.$$

Pruebe las siguientes afirmaciones:

1. La sucesión $\{x_n\}$ es creciente,
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$,
3. $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1})/(x_n) = 1/2$.

(h) Pruebe que la sucesión de funciones x^n converge puntualmente pero no uniformemente en el intervalo $[0, 1]$.

2.4. Ecuaciones diferenciales ordinarias

(a) Resuelva los problemas de valores iniciales

$$\left(1 + t^2\right) \frac{dy}{dt} - 2ty - 2 = 0, \qquad y(0) = -2;$$

y

$$(1 + t) \frac{dy}{dt} + y - 2(1 + t) = 0, \qquad y(0) = 3.$$

(b) La ecuación diferencial

$$y' + 2t^{-1}y = t^{-2},$$

tiene un coeficiente discontinuo en $t = 0$. Halle una solución para $t > 0$ y describa el comportamiento de la solución cuando $t \to 0$ para varios valores de la constante de integración. Construya la gráfica de algunos miembros de la familia de curvas integrales.

(c) Un grupo de ciudadanos preocupados por la preservación del medio ambiente ha detectado que una fábrica contamina con sus desechos tóxicos un lago cercano a su localidad. Tras realizar exhaustivas investigaciones, encontraron que la población más grande de peces que habita el lago está disminuyendo rápidamente por causa de los contaminantes arrojados. Se detectó que dicha población disminuye proporcionalmente al número de peces con una constante de proporcionalidad igual a una décima. Si los estudios indican también que al llegar a disminuir la población de estos peces a una décima parte de su población actual no será posible salvar la especie, ¿de cuánto tiempo dispone la comunidad para tomar medidas que reviertan el problema?

(d) Sea $f(y)$ una función continua.

1. Suponga que $f(-\alpha) > 0$ y $f(\alpha) < 0$, en donde α es un número real. Demuestre que hay un punto de equilibrio para $dy/dt = f(y)$ entre $y = -\alpha$ y $y = \alpha$.
2. Considere que $f(-\alpha) > 0$, que $f(\alpha) < 0$ y que hay muchos puntos de equilibrio finitos entre $y = -\alpha$ y $y = \alpha$. Si $y = \alpha_0$ con $-\alpha < \alpha_0 < \alpha$ es una fuente, demuestre que $dy/dt = f(y)$ debe tener al menos dos sumideros entre $y = -\alpha$ y $y = \alpha$. ¿Puede decir en dónde están localizados?

(e) Digamos que $dy/dt = f(y)$ tiene un punto de equilibrio en y_0 y

- $f'(y_0) = 0$, $f''(y_0) = 0$ y $f'''(y_0) > 0$: ¿es y_0 una fuente, un sumidero o un nodo?
- $f'(y_0) = 0$, $f''(y_0) = 0$ y $f'''(y_0) < 0$: ¿es y_0 una fuente, un sumidero o un nodo?
- $f'(y_0) = 0$ y $f''(y_0) > 0$: ¿es y_0 una fuente, un sumidero o un nodo?

(f) Dadas las siguientes ecuaciones de Bernoulli, resuélvalas proponiendo un cambio de variable adecuado

1. $$3\left(1 + x^2\right)\frac{dy}{dx} = 2xy\left(y^3 - 1\right),$$
2. $$\frac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right).$$

(g) Encuentre una familia paramétrica de soluciones de las ecuaciones diferenciales de Ricatti

1. $$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2,$$
   para la que se sabe que $y_1 = 2/x$ es una solución particular, y de
2. $$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - (\tan x)\,y + y^2,$$
   para la cual $y_1 = \tan x$ es una solución particular conocida.

(h) Para la siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(y-2)(y+1)}, \qquad y(0) = 1/2.$$

1. Esboce su línea de fase y analice el comportamiento de la solución que satisfaga dicha condición inicial.

2. Aplique procedimientos analíticos al problema de valor inicial mencionado y compare sus resultados con el análisis del inciso a).

(i) Para la familia paramétrica

$$\frac{dy}{dt} = y^6 - 2y^4 + \alpha,$$

identifique los valores de bifurcación de α y describa las bifurcaciones que se presentan cuando α se incrementa. [*Sugerencia:* Reescriba y^6 como $(y^3)^2$ y use la ecuación cuadrática para encontrar los puntos de equilibrio].

(j) Para la familia paramétrica de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y^2+1} + \alpha,$$

1. localice los puntos de equilibrio si α es ligeramente mayor que cero, si $\alpha = 0$ y si α es ligeramente menor a cero.
2. Describa la bifurcación que ocurre en $\alpha = 0$.

(k) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + \frac{1}{2}y, \\ \dot{y} &= -2x, \end{aligned}$$

1. encuentre la solución general del sistema y también la del caso particular cuando la condición inicial es $(1, 2)$.
   Alternativamente, el sistema dado puede escribirse en la forma vectorial $d\overrightarrow{X}/dt = \mathbf{A}\overrightarrow{X}$**,** en donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   y $\overrightarrow{X}$ es un vector columna de entradas (x, y). Calcule para la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$:
2. La traza T y el determinande D.
3. El polinomio característico y los eigenvalores.
4. Los eigenvectores correspondientes a los eigenvalores hallados en el inciso anterior.
5. Realice un esbozo de las soluciones en el plano xy indicando el tipo y dirección de las trayectorias.

2.5. Probabilidad

(a) Se selecciona una pelota de una cesta que contiene pelotas rojas, blancas, azules, amarillas y verdes. Si la probabilidad de seleccionar una pelota roja es de $1/5$ y la de seleccionar una blanca es de $2/5$, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar una pelota azul, amarilla o verde?

(b) Se eligen al azar tres de ocho palitos de madera de longitides de longitudes 1, 2, …, 8, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que formen un triángulo?

(c) Se extraen sucesivamente dos cartas de una baraja bien mezclada. Encontrar la probabilidad de que

1. la primera no sea un 10 de bastos o un as,
2. la primera sea un as, pero no la segunda,
3. al menos una sea de copas,
4. las cartas no sean del mismo palo,
5. a lo sumo una sea figura (sota, caballo, rey),
6. la segunda no sea figura,
7. la segunda no sea figura su la primera lo era,
8. sean figuras o espadas, o ambas.

(d) Se lanzan dos dados al aire, ¿cuál es la probabilidad de que el producto de los dos números sea par?

(e) Suponga que los tres últimos clientes de un restaurante peredieron las contraseñas de sus sombreros, por lo que la encargada del guardarropa debe entregar los tres sombreros al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que:

1. nadie reciba el sombrero correcto?
2. sólo un hombre reciba su propio sombrero?
3. los tres hombres reciban su sombrero correspondiente?

(f) Se tira un dado hasta que salga un uno. Calcular la probabilidad de que:

1. se necesiten 10 intentos
2. se necesiten menos de cuatro intentos
3. se necesite un número impar de intentos

(g) En el último año de la escuela, en un grupo de 100 alumnos se encontró que 42 cursaron matemáticas, 68 psicología, 54 historia, 22 matemáticas e historia, 25 matemáticas y psicología, siete historia pero no matemáticas ni psicología, 10 las tres materias y ocho ninguna de las tres. Si selecciona un estudiante aleatoriamente, encuentre la probabilidad de que:

1. una persona inscrita en psicología haya estudiado las tres materias,
2. una persona que no se inscribió en psicología haya tomado historia y matemáticas.

(h) Dos estudiantes A y B, están inscritos en un curso. Si el estudiante A asiste a las clases 80 % de las veces y el estudiante B, 60 %, y si ls ausencias de los dos estudiantes son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos estudiantes esté en clase un día concreto?

(i) Una máquina produce tornillos que colocados en una caja. Se sabe que una de cada diez cajas son defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que ordenó trs cajas obtenga puros tornillos buenos?

(j) Un bolso contiene dos monedas de plata y cuatro de cobre, y otro contiene cuatro de plata y tres de cobre. Si se elije al azar una moneda de uno de los bolsos, ¿cuál es la probabilidad de que sea de plata?

(k) Entre personas que donan sangre a una clínica, 80 % tiene Rh^+; es decir, tienen el factor Rhesus en la sangre. Cinco personas donan sangre en la clínica un día determinado.

1. Calcular la probabilidad de que al menos una de las cinco no tenga el factor Rh.
2. Calcular la probabilidad de que cuando mucho cuatro de las cinco tengan sangre Rh^+.

(l) Supóngase que 0,005 % de la población de un país muere debido a cierto tipo de accidente cada año y que una compañia de seguros tiene entre sus clientes 10 mil que están asegurados contra este tipo de accidente. Hallar la probabilidad de que la compañia deba pagar más de tres pólizas en un año dado.

(m) Se ha observado en forma empírica que las muertes ocacionadas por accidentes de tráfico ocurren a la razón de ocho por hora en los largos fines de semana feriados. En el supuesto de que estas muertes ocurren en foerma independiente, calcular la probabilidad de que:

1. transcurra una hora sin que haya muertes,
2. transcurra un periodo de 15 minutos sin muertes,
3. transcurran cuatro periodos consecutivos, que no se traslapen, sin que hayan muertes.

(n) Un físico toma 25 medidas independientes de la gravedad específica de cierto cuerpo. Sabe que las limitaciones de su equipo son tales que la desviación típica de cada medición es σ unidades.

1. Utilizando la desigualdad de Chebyshev, encuéntrese una cota inferior para la probabilidad de que el promedio de sus mediciones difiera de la verdadera gravedad del cuerpo a menos de $\sigma/4$ unidades.
2. Utilizando el teorema del límite central, encuéntrese un valor aproximado para la probabilidad de la parte a.

(ñ) Supóngase que, en promedio los dos padres de una tercera parte de los de los graduados de un colegio asisten a la ceremonia de graduación, sólo uno de los dos dos padres de la otra tercera parte de estos graduados asiste a la ceremonia y ninguno de los dos padres de la restante tercera parte de estos gradiados asiste a la ceremonia. Si en una clase hay 600 graduados, ¿cuál es la probabilidad de que asistan a la ceremonia de graduación más de 650 padres?

3. Algunos ejemplos de evaluaciones diagnósticas

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

(OPCIÓN A)

Semestre 2014-I

Fecha: ____________

Nombre: ____

Ocupación (o profesión) y último grado de estudios: ____________________

Indicaciones. Resuelva correctamente cada uno de los siguientes ejercicios; al escribir sus respuestas, exprese con toda claridad sus ideas, e indique las operaciones que efectúe y los conceptos matemáticos que utilice.

(a) Dada la función

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(xy, y^2\right).$$

Si σ es la trayectoria $y = 2x^2$ que une $(0,0)$ con $(1,2)$ en $\mathbb{R}^2$, evalúe $\int_\sigma \overrightarrow{F}$. ¿Depende la integral calculada en el inciso anterior de la trayectoria que une $(0,0)$ con $(1,2)$?

(b) Encuentre la representación matricial (en la base canónica), así como el núcleo, imagen, rango y nulidad, de las transformaciones $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, definida como

$$T\left(\ x,\quad y,\quad z,\quad w\ \right) = \left(\ x - 2z,\quad 2y + 3w\ \right).$$

(c) Demuestre el siguiente resultado: Si a es cualquier número distinto de cero y

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

entonces f es continua en a.

(d) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = -3x + \frac{1}{2}y,$$
$$\dot{y} = -2x,$$

1. encuentre la solución general del sistema y también la del caso particular cuando la condición inicial es $(1, 2)$.
   Alternativamente, el sistema dado puede escribirse en la forma vectorial $d\overrightarrow{X}/dt = \mathbf{A}\overrightarrow{X}$**,** en donde

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   y $\overrightarrow{X}$ es un vector columna de entradas (x, y). Calcule para la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$:
2. La traza T y el determinande D.
3. El polinomio característico y los eigenvalores.
4. Los eigenvectores correspondientes a los eigenvalores hallados en el inciso anterior.
5. Realice un esbozo de las soluciones en el plano xy indicando el tipo y dirección de las trayectorias.

(e) Dos estudiantes A y B, están inscritos en un curso. Si el estudiante A asiste a las clases 80 % de las veces y el estudiante B, 60 %, y si ls ausencias de los dos estudiantes son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos estudiantes esté en clase un día concreto?

Comprensión de textos en inglés

Lea el siguiente texto[1] y responda las preguntas al final del mismo:

Whatever our professional preoccupations may be, we cannot escape the feeling that we live in an age of transition, an age that demands constructive modification of our environment. We must find and explore new resources, must understand our environment better, and must achieve a less destructive coexistence with nature. The time scale of the qualitative modifications that are required to achieve these goals is not comparable to the immense time spans involved in biological or geological evolution. Rather, it is of the order of a decade. Thus the modifications that must be made interfere with our own lives and the lives of the next generation.

[1]Este texto en inglés fue extraído del libro *Exploring Complexity: an introduction,* de Gregoire Nicolis e Ilya Prigogine.

We cannot anticipate the outcome of this period of transition, but it is clear that science is bound to play an increasingly important role in our effort to meet the challenge of understanding and reshaping our global environment. It is a striking fact that at this crucial moment science is going through a period of reconceptualization.

The two great revolutions in physics at the beginning of this century were quantum mechanics and relativity. Both started as corrections to classical mechanics, made necessary once the roles of the universal constants c (the velocity of light) and h (Planck's constant) were discovered. Today, both of these areas of physics have taken an unexpected "temporal" turn: Quantum mechanics now deals in its most interesting part with the description of unstable particles and their mutual transformations. Relativity, which started as a a geometrical theory, today is mainly associated with the thermal history of the universe.According to the author:

(a) What are the goals we must achieve in this age of transition? Give your answer in Spanish.

(b) How long does it take to achieve the qualitative modifications required in this age of transition? Give your answer in Spanish.

(c) What does quantum mechanics deal with nowadays? Give your answer in Spanish.

(d) What is relativity associated with today? Give your answer in Spanish.

(e) Make a brief sumary of the text (80 – 100 words) in Spanish.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

(OPCIÓN A)

Semestre 2014-I

Fecha: ____________

Nombre: ____

Ocupación (o profesión) y último grado de estudios: _____________________

Indicaciones. Resuelva correctamente cada uno de los siguientes ejercicios; al escribir sus respuestas, exprese con toda claridad sus ideas, e indique las operaciones que efectúe y los conceptos matemáticos que utilice.

(a) Demuestre que la función

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

es solución de la ecuación de Laplace en tres dimensiones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

(b) Encuentre la representación matricial de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y-3z \end{pmatrix},$$

en las bases $B_1 = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ y $B_2 = \{(1,-1),(2,3)\}$

(c) Demostrar que un polinomio con coeficientes reales de grado par tiene al menos dos raíces reales si toma, al menos una vez, un valor cuyo signo sea contrario al de su término principal (el de grado más alto). (Sugerencia: aplique el Teorema del Valor Intermedio).

(d) Un grupo de ciudadanos preocupados por la preservación del medio ambiente ha detectado que una fábrica contamina con sus desechos tóxicos un lago cercano a su localidad. Tras realizar exhaustivas investigaciones, encontraron que la población más grande de peces que habita el lago está disminuyendo rápidamente por causa de los contaminantes arrojados. Se detectó que dicha población disminuye proporcionalmente al número de peces con una constante de proporcionalidad igual a una décima. Si los estudios indican también que al llegar a disminuir la población de estos peces a una décima parte de su población actual no será posible salvar la especie, ¿de cuánto tiempo dispone la comunidad para tomar medidas que reviertan el problema?

(e) Entre personas que donan sangre a una clínica, 80 % tiene Rh^{+}; es decir, tienen el factor Rhesus en la sangre. Cinco personas donan sangre en la clínica un día determinado.

1. Calcular la probabilidad de que al menos una de las cinco no tenga el factor Rh.
2. Calcular la probabilidad de que cuando mucho cuatro de las cinco tengan sangre Rh^{+}.

Comprensión de textos en inglés

Lea el texto siguiente[2] y responda las preguntas que vienen a continuación:

The New Megalopolis:

China isn't the world's most ferocious new economic competitor–the exploding east-coast corridor, from Beijing to Shanghai, is. India as a whole is not developing high-tech industries and attracting jobs, but the booming mega-region stretching from Bangalore to Hyderabad is. Across the world, in fact, nations don't spur growth so much as dynamic regions–modern versions of the original "megalopolis," a term coined by the geographer Jean Gottman to identify the sprawling Boston-New York-Washington economic power corridor. The New Megas are the real economic organizing units of the world, producing the bulk of its wealth, attracting a large share of its talent and generating the lion's share of innovation. They take shape as powerful complexes of multiple cities and suburbs, often stretching across national borders–forming a vast expanse of trade, transport, innovation and talent. Yet, though the rise of regions has been apparent for more than a decade, no one has collected systematic information on them–not the World Bank, not the IMF, not the United Nations, not the global consulting firms. That's why my team and I set about building a world map of the New Megas shaped by satellite images of the world at night, using light emissions to identify the outlines of each region, and additional

[2]Este texto en inglés fue extraído de la revista *Newsweek* (July 3-July 10, 2006).

data in categories such as population and economic growth to chart their relative peak strengths and dynamism. The result is the topographical maps you see above.

The maps make it clear that the global economy takes shape around perhaps 20 great Megas–half in the United States and the rest scattered throughout the world. These regions are home to just 10 percent of total world population, 660 million people, but produce half of all economic activity, two thirds of world-class scientific activity and three quarters of global innovations. The great urbanologist Jane Jacobs was the first to describe why megalopolises grow. When people cluster in one place, they all become more productive. And the place itself becomes much more productive, because collective creativity grows exponentially. Ideas flow more freely, are honed more sharply and can be put into practice more quickly. Later, Nobel Prize-winning economist Robert Lucas dubbed these forces “human capital externalities,” and explained why they seem to override “the usual economic forces,” like prices: “What can people be paying Manhattan or downtown Chicago rents for, if not to be around other people?” There is, however, a tipping point. The forces of price and congestion begin pushing people away from the center. But make no mistake, this has nothing to do with the “decentralization of work,” as many have argued. The huge economic advantages of clustering still guide the process, which is why second cities emerge near big cities or in the corridors between them, not in the middle of nowhere. The biggest Mega in economic terms is the original, the Boston-to-Washington corridor. In 1961 it was home to about 32 million people; today its population has risen to 55 million, more than 17 percent of all Americans. The region generates \$2.5 trillion in economic activity, making it the world’s fourth largest economy, bigger than France or the United Kingdom. Next in line is Chi-Pitts, the great Midwestern Mega running from Chicago to Detroit, Cleveland and Pittsburgh, with \$2.3 trillion in economic activity. Three of the power centers of the U.S. economy even stretch beyond American borders: So-Cal runs from Los Angeles to San Diego across the Mexican border to Tijuana; Tor-Buff-Chester sprawls from Toronto to Rochester, and Cascadia from Portland, Oregon, to Vancouver.

(a) Give your interpretation of the author’s conception of “megalopolis”?

(b) Why did the team led by the author of the article build maps of the New Megas?

(c) What conclusions can be drawn from these maps?

(d) List some megas in the continents of:

   1. America
   2. Europe
   3. Asia

(e) What were the criteria used by the author to classify New Megas?

(f) What contributions have the New Megas made to scientific activity and global innovation (in percentages)?

(g) According to the article, why have megalopolis been growing?