UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO

Maestría en Ciencias de la Complejidad

Guía para preparar la evaluación diagnóstica

(Opción B)

Última revisión: Semestre 2015-I

Índice

1. Temarios **5**

1.1. Álgebra y trigonometría 5
1.1.1. Bibliografía 7
1.2. Geometría analítica 7
1.2.1. Bibliografía 9
1.3. Cálculo diferencial e integral de una variable 9
1.3.1. Bibliografía 11

2. Ejercicios propuestos **12**

2.1. Álgebra y trigonometría 12
2.2. Geometría analítica 15
2.3. Cálculo diferencial e integral de una variable 20

3. Algunos ejemplos de evaluaciones diagnósticas **28**

Presentación

El programa de la Maestría en Ciencias de la Complejidad (MCC) tiene el propósito de desarrollar, en los profesionistas que se formen en él, aptitudes para la investigación en las ciencias de la complejidad. Los temas de investigación que se abordan en la actualidad desde este enfoque abarcan una amplia variedad de campos del conocimiento pertenecientes a las áreas físico-matemáticas, químico-biológicas, sociales-administrativas e inclusive humanísticas. No está por demás mencionar la creciente tendencia manifestada, por profesionistas con formaciones en estos campos tan diversos, por conocer herramientas y metodologías de los sistemas complejos con la finalidad de aplicarlas en problematicas que resultan de su interés.

Dado el marcado carácter interdisciplinario de las investigaciones realizadas en sistemas complejos, la MCC cuenta con dos especializaciones: la denominada *Opción A,* que está dirigida a profesionistas con una formación matemática equivalente a la que proporcionan licenciaturas en ciencias e ingenierías, y la *Opción B*, diseñada para profesionistas que cuentan con una formación matemática menos rigurosa, pero que poseen sólidos conocimientos matemáticos a nivel de bachillerato.

La *Guía para preparar la evaluación diagnóstica,* se ha diseñado con un propósito doble: por una parte, darle a conocer a todo interesado en la MCC de forma explícita, de acuerdo con el perfil de ingreso de la misma[1], el tipo de conocimientos matemáticos que debe poseer a su ingreso para poder afrontar exitosamente el plan de estudios de este posgrado; y por otra, ser un instrumento de apoyo en la preparación de la *evaluación diagnóstica.*

La presente guía está elaborada para auxiliar a los aspirantes interesados en ingresar a la *Opción B* de la MCC. La guía incluye un bosquejo de los temarios de materias como álgebra y trigonometría, geometría analítica y cálculo diferencial e integral de una variable. Si bien estos temarios se han diseñado tomando en cuenta diversos libros de texto y programas de estudios, el criterio fundamental para su elaboración ha sido seleccionar sólo aquellos contenidos que el estudiante mínimo debe saber para ingresar a la maestría. Cada uno de estos temarios viene acompañado de una bibliografía básica y actualizada, integrada en su mayor parte por libros que pueden ser consultados en las bibliotecas de los planteles Del Valle y Centro Histórico de la UACM. Asimismo, esta guía está integrada por un número significativo de ejercicios representativos de tales materias y que son del tipo de los que podrían constituir la evaluación diagnóstica; las respuestas de estos ejercicios, y las de otros similares, pueden consultarse en las referencias bibliográficas sugeridas. Al final de la guía se han agregado dos ejemplos de evaluaciones diagnósticas construidas con algunos de los ejercicios propuestos.

La *evaluación diagnóstica* además de contener un apartado para la resolución de problemas matem‡ticos, también contiene otro dedicado a la comprensión de textos en el idioma inglés. Con ello, se pretende explorar la habilidad que posee el aspirante para

[1]Consúltese el perfil de ingreso a la MCC en el *Documento Maestro.*

comprender en este idioma desde textos técnicos hasta ensayos filosóficos. Los dos ejemplos de evaluaciones diagnósticas del final de la guía continen una sección con ejercicios de este tipo. Cabe mencionar que sólo la satisfactoria resolución de las secciones de problemas matemáticos y la de comprensión de textos en inglés le permitirá al aspirante inscribirse directamente en la MCC.

Por último, la *evaluación diagnóstica* se ha diseñado de manera que sea autocontenida; es decir, que además de incorporar una serie de problemas representativos de los contenidos de los programas de las materias ya señaladas, también presente la información que se requiera para resolverlos, como pudiera ser el enunciado de ciertos teoremas, de fórmulas o identidades matemáticas. De esta manera, el aspirante sólo requerirá para contestar la evaluación de tan sólo lápiz, papel y si acaso, de una calculadora. Se le sugiere al aspirante que en las soluciones que proponga de los ejercicios, exprese con toda claridad y orden sus ideas, que indique las operaciones que efectúe y los conceptos matemáticos que utilice. El tiempo estimado para resolver la evaluación diagnóstica, no debe exceder de tres horas.

Mayo de 2015

1. Temarios

1.1. Álgebra y trigonometría

1. Operaciones con expresiones algebraicas.
   - (a) Adición y sustracción.
   - (b) Multiplicación.
   - (c) División.
   - (d) Productos notables.
2. Factorización y operaciones con fracciones.
   - (a) Tipos simples de factorización
   - (b) Trinomoos con factores distintos.
   - (c) Factorización por agrupamiento.
   - (d) Fracciones algebraicas.
   - (e) Reducción de términos mínimos.
   - (f) Multiplicación y división de fracciones
   - (g) Adición de fracciones
   - (h) Fracciones complejas.
3. Exponentes y radicales.
   - (a) Leyes de exponentes.
   - (b) Exponentes enteros negativos y nulos.
   - (c) Exponentes frraccionarios
   - (d) Leyes de radicales.
   - (e) Adición y sustracción de radicales.
   - (f) Multiplicación y división de radicales.
4. Relaciones y funciones.
   - (a) Coordenadas rectangulares.
   - (b) relaciones y funciones.
   - (c) Gráficas de relaciones y funcinoes.
   - (d) La fórmula de la distancia y el círculo.
5. Ecuaciones lineales.

(a) Ecuaciones condicionales e identidades.
(b) Operaciones con ecuaciones.
(c) Ecuaciones lineales con una variable.
(d) Problemas planteados con palabras.
(e) Ecuacioines lineales con dos variables.
(f) Solución mediante métodos algebraicos.
(g) Ecuaciones lineales en tres variables.
(h) Problemas planteados con palabras que conducen a sistemas de acuaciones.
(i) Razón y proporción.
(j) Variación

6. Ecuaciones cuadráticas.

(a) Númerso complejos.
(b) Solución de ecuaciones cuadráticas mediante factorización.
(c) Solución usando fórmula.
(d) Problemas planteados con palabraas que involucran ecuaciones cuadráticas.
(e) Ecuaciones en forma cuadrática.
(f) Ecuaciones que contienen radicales.
(g) Naturaleza de las raíces.
(h) Suma y producto de las raíces.
(i) Funciones cuadráticas.
(j) Valores máximos y mínimos.

7. Trigonometría.

(a) Razones trigonométricas.
(b) Trigonometría en el plano cartesiano.
(c) Funciones trigonométricas.
(d) Identidades trigonométricas.
(e) Ecuaciones trigonométricas.

1.1.1. Bibliografía

1. G. Fuller, W. L. Wilson y H. C. Miller, Álgebra Universitaria, Décima tercera reimpresión (Compañia Editorial Continental, México, 2001).
2. C. H. Lehmann, *Álgebra* (Limusa, México, 2004).
3. E. W. Swokowski, *Álgebra Universitaria* (CECSA, México, 2003).
4. F. M. Lovaglia, M. A. Elmore y D. Conway, *Álgebra,* Séptima reimpresión (Oxford University Press, México, 2005).
5. P. K. Rees y F. W. Sparks, *Álgebra* (Reverté, México, 1984).
6. A. Goodman y L. Hirsch, *çlgebra y Trigonometr'a con Geometr'a Anal'tica* (Prentice Hall, MŽxico, 1996).
7. E. de Oteyza de Oteyza, C. Hernández Garciadiego y E. L. Osnaya, *Álgebra* (Pearson Educación, México, 1996).
8. C. M. Adalid Díez de U. et al, *Álgebra Básica. Soluciones con el Paquete Mathematica* (UAM-Xoch, México, 2001).

1.2. Geometría analítica

1. Coordenadas rectangulares.
   - (a) Coordenadas rectangulares.
   - (b) Distancia entre dos puntos.
   - (c) Punto de división.
   - (d) Inclinación y pendientes de una recta.
   - (e) Rectas paralelas y perpendiculares.
   - (f) Ángulo entre dos rectas.
   - (g) Punto que divide a un segmento de recta en una razón dada.
2. Ecuaciones y lugares geométricos.
   - (a) Lugar geométrico, intersecciones con los ejes, simetrías y campos de variación.
   - (b) Ecuación de un lugar geométrico.
3. La línea recta.
   - (a) Formas de la ecuación de una línea recta:
     1. Punto pebndiente.

2. Pendiente-ordenada al origen.
3. Cartesiana.
4. Reducida o abscisa y ordenada al orgen.
5. General.
6. Normal.

(b) Reducción de la forma normal a la general.
(c) Distancia de un punto a una recta.

4. La circunferencia.
    (a) Definición.
    (b) La ecuación de una circunferencia.
    (c) Ecuaciones de tangentes a circunferencias.
5. La parábola.
    (a) Definición.
    (b) Construcción de la parábola por puntos empleando regla y compás.
    (c) Propiedades intrínsecas de la parábola.
    (d) La ecuación de una parábola.
6. La elipse.
    (a) Definición.
    (b) Construcción de una elipse por puntos.
    (c) Propiedades iontrínsecas de la elipse.
    (d) La ecuación de la elipse.
7. La hipérbola.
    (a) Definición.
    (b) Construcción de una hipérbola por puntos.
    (c) Propiedades intrínsecas de la hipérbola.
    (d) La ecuación de la hipérbola.
8. Coordenadas polares.
    (a) Coordenadas polares.
    (b) Simetrías.
    (c) Relación entre coordenadas rectangulares y polares.

1.2.1. Bibliografía

1. J. H. Kindle, Geometría Analítica. Serie Schaum (Editorial McGraw-Hill Latinoamericana, Bogotá, 1976).

2. C. H. Lehmann, *Geometría Analítica* (Limusa, México, 2004).

3. E. de Oteyza, E. L. Osnaya, J. A. Gómez Ortega, A. Ramírez Flores y C. Hernández Garciadiego, *Geometría Analítica*, Primera edición (Pearson Educación, México, 1994).

4. R. Solis, J. Nolasco y A. Victoria, *Geometría Analítica* (Limusa, México, 1984).

5. E. de Oteyza, E. L. Osnaya, C. Hernández Garciadiego, A. M. Carrillo Hoyo y A. Ramírez Flores, *Geometría Analítica y Trigonometría* (Prentice Hall, México, 2001).

6. J. I. Arcos Quezada, *Geomtría Analítica para Estudiantes de Ingeniería* (Fundación ICA, México, 2002).

7. J. H. Kindle, *Geometría Analítica Plana y del Espacio*, Serie Schaum (McGraw Hill, Colombia, 1990).

8. N. Efimov, *Curso Breve de Geometría Analítica* (Mir, Moscú, 1969).

1.3. Cálculo diferencial e integral de una variable

1. Funciones límites y series.

   (a) Funciones.

      1. Definición de función y clasificación.
      2. Funciones inversas y trascendentes.

   (b) Límites.

      1. Definiciones y propiedades.
      2. Continuidad y discontinuidad.

   (c) Series.

      1. Definiciones y clasificaciones.
      2. El número e.

2. Cálculo diferencial.

   (a) Derivada de una función.

   (b) Derivación algebraica.

3. Funciones trascendentes.

   (a) derivación exponencial y logarítmica.
   (b) Funciones circulares directas.

4. Funciones inversas e implícitas.
   (a) Derivadas de funciones inversas.
   (b) Derivada de las funciones implícitas.
   (c) Derivadas sucesivas.

5. Aplicaciones de las derivadas.
   (a) Variación de las funciones. Rapidez.
   (b) Concavidad.
   (c) Máximos y mínimos.
   (d) Dirección de una curva.
   (e) Tangentes y normales.
   (f) Ángulo entre dos líneas.

6. Cálculo integral.
   (a) Integración
   (b) La integral como el límite de una suma.

7. Procedimientos de integrción.
   (a) Inmediata y mediante factor.
   (b) Otros tipos de integrales inmediatas.
   (c) Integrales de fracciones.
   (d) Métodos de integración:
      1. coeficientes indeterminados,
      2. por partes,
      3. trigonométrica,
      4. por sustitución, y
      5. por series.

8. Aplicaciones simples del cálculo integral.
   (a) Áreas de superficies planas.
   (b) Rectificación de curvas planas.
   (c) Áreas de suiperficies de revolución.

1.3.1. Bibliografía

1. E. Mendelson, Introducción al Cálculo, Serie Schaum (McGraw Hill, México, 1986).

2. L. Leithold, *El Cálculo*, 7^a edición (Oxford University Press, México, 1998).

3. J. Stewart, *Cálculo,* Cuarta edición (Thomson-Learning, México, 2002).

4. E. W. Swokowski, *Cálculo con Geometría Analítica* (Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1989).

5. C. Pita Ruíz, *Cálculo de una Variable* (Prentice Hall, México, 1998).

6. G. B. Thomas Jr. y R. L. Finney, *Cálculo de una Variable*, 9^a edición (Pearson Educación, México, 1998).

7. W. A. Granville, *Cálculo Diferencial e Integral* (Limusa, México, 2005).

8. D. Huges-Hallett, A. M. Gleason, et al., *Cálculo Aplicado* (CECSA, México, 2002).

2. Ejercicios propuestos

2.1. Álgebra y trigonometría

1. Elimina los símbolos de agrupamiento de

$$x - 3y(x - 4y) - (-2x + 5y).$$

2. Suma los tres polinomios

$$5a - 2b + 8c, \qquad -16a + 8b + 4c, \qquad 6a - 8b - 9c.$$

3. Combina los términos semejantes y simplifica la expresión

$$\left(3x^2 + 5x - 5\right) + \left(4x^2 - 3x + 7\right) - (6x + 3)\,.$$

4. Encuentra $f(x) + g(x) - h(x)$, con todos los términos semejantes combinados con respecto a los polinomios particulares.

$$f(x) = x^2 - 3x + 4, \quad g(x) = -2x^2 + 5x + 6, \quad h(x) = 4x - 7.$$

5. Trazar la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

6. Resuelva la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & x & -5 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

7. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + y - 3 &= 0, \\ x + 3y &= 4, \end{aligned}$$

resuélvalo empleando los métodos:

(a) gráfico,

(b) de adición o sustracción,

(c) de sustitución, y

(d) por determinantes.

8. Lorenzo y Miguel fueron a la tienda a comprar lo necesasrio para una excursión. Llevaban un total de \$300 para gastos. Miguel gastó 9/10 de su dinero, Lorenzo 4/5 del suyo y regresaron a casa con un total de \$40. ¿Cuánto llevaba cada uno al ir a la tienda?

9. Hallar dos números tales que la suma de sus recíprocos sea 5, y que la diferencia de sus recíprocos sea 1.

10. Un padre tiene dos hijos, el grande cuatro años mayor que el primero. Dentro de 23 años, el padre tendrá tantos años como la suma de las edades de sus hijos. ¿Qué edad tiene cada uno, si sabemos que actualmente el doble de la edad del padre es igual a nueve veces la edad del mayor más cuatro veces la del menor?

11. Calcule el determinante de tercer orden
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & -6 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

12. Hallar un par de números que difieran en 3 y cuyo producto sea 108. ¿Hay un segundo par de números que satisfaga dicha ecuación? Si lo hay, encontrarlo.

13. Una ciudad posee un parque cuadrado sembrado de árboles y flores cuya área es 1/64 de kilómetro cuadrado. El lote de estacionamiento asfaltado y adyacente al parque sobre la misma calle es también un cuadrado, pero mayor que el parque. Su propietario es un industrial que desea permitir que la ciudad extienda el límite posterior del parque ocupando parte de su lote, paralelo a la calle, levantando el pavimento y sembrando árboles. El parque resultante tendrá entonces la misma área que queda al lote del industrial. Hallar la longitud original del terreno del industrial.

14. Resuelva las siguientes ecuaciones

   (a) $x^4 - x^2 - 2 = 0$,

   (b) $[(x+1)\,/\,(x-3)] - [(x+1)\,/\,(x-3)]^{1/2} - 2 = 0$,

   (c) $[2/\,(x-1)]^2 + 7\,[2/\,(x-1)] - 30 = 0$,

   (d) $\sqrt{x+6} = \sqrt{6x+6} - \sqrt{x}$.

15. Dada la ecuación
$$5x^2 - (k+2)x + 7k + 1 = 0,$$
encuentre el valor de k de manera que

(a) una raíz sea 3,

(b) una raíz sea la negativa de la otra raíz.

16. Resuelva
$$x^3 - 2x - 4 = 0,$$
dado que una raíz es 2.

17. Resuelva gráfica y algebraicamente los sistemas de ecuaciones

(a)
$$\begin{aligned} 3x - 2y + 1 &= 0, \\ y^2 - 4x - 8 &= 0; \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 4y^2 + 9x^2 - 36 &= 0, \\ 9y^2 - 4x^2 - 36 &= 0. \end{aligned}$$

18. Ilustre la solución del sistema
$$\begin{cases} y \geq x - 4, \\ y < 4x, \\ x = 3, \end{cases}$$
con una gráfica.

19. Desarrolle
$$(a - x)^6$$
y simplifique cada término.

20. Para calcular la altura de la torre Eiffel nos situamos a 74 m de la base de la torre. Si observamos la torre con un ángulo de elevación de 70°, ¿cuánto mide la torre?

21. Desde lo alto de una torre de 40 m de altura se ven las almenas de otra torre separada 20 m, bajo un ‡ngulo de 70°. ¿Cuál es la altura de la torre vecina?

22. Juan y Pedro ven desde las puertas de sus casas una torre bajo ‡ngulos de 45° y 60°. La distancia entre sus casas es de 126 m y la torre está situada entre sus casas. Encuentre la altura de la torre.

23. De un triángulo isósceles conocemos su lado desigual, 18 m, y su altura, 10 m. ¿Cuánto miden sus ángulos?

24. Si $tan\ a = -2$ y $a < 180°$, encuentra $sen\ a$ y $cos\ a$.

25. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de $50°$. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esta abertura?

26. Resuelva las siguientes operaciones dando una respuesta exacta:

    (a) $sen 45° + \sec 0° - \csc 60° + \cot 45°$
    (b) $2cos 360° \left(sen 45 + \cot 30°\right) + \sec 60°$

27. Demuestre las siguientes identidades:

    (a) $(secx + tanx)(1 - senx) = \cos x$
    (b) $tan^2x + 1 = \sec^2 x$
    (c) $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = sen^2x$
    (d) $cscx - senx = (\cot x)(\cos x)$
    (e) $\frac{\cos x}{1+senx} = \frac{1-senx}{\cos x}$

28. Resuelva las siguientes ecuaciones en el intervalo $[0, 2\pi]$:

    (a) $4cos^2x - 3 = 0$
    (b) $2senx - 1 = 0$
    (c) $(\tan x - 1)(4sen^2x - 3) = 0$
    (d) $\sqrt{3} + 2sen\theta = 0$
    (e) $2\cos^2 x + \cos x = 0$

2.2. Geometría analítica

1. Dados los puntos $A(3,3)$, $B(-3,-3)$ y $C(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ localizados en el plano cartesiano.

    (a) Demuestra que son los vértices de un triángulo equilàtero.
    (b) Halla las coordenadasdel punto $P(x, y)$ que divide al lado AB en la razón $AP/PB = -3$.
    (c) Encuentra las pendientes de las rectas que determinan sus lados, y
    (d) selecciona cualesquiera dos de estas rectas y muestra que el ángulo que forman es de $60°$.

2. Diga cuáles son sus intercepciones con los ejes, las simetrías, la extensión y asíntotas, de las curvas

   (a) $y^2 = x^3$,

   (b) $x^2y - x^2 - y = 0$.

3. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto

   (a) que se mueve de tal manera que siempre equidista de dos puntos dados $A(-1, 2)$ y $B(4, -1)$;

   (b) que se mueve de tal manera que su distancia al eje y es siempre igual a su distancia del punto $A(4, 0)$; y

   (c) que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $A(3, 0)$ y $B(-3, 0)$ es siempre igual a 8.

4. Hallar la ecuación

   (a) de la recta que pasa por el punto $(-3, 1)$ y es paralela a la recta determinada por los puntos $(0, -2)$ y $(5, 2)$; y.

   (b) de la mediatriz (perpendicular en su punto medio) del segmento $(-2, 1)$ y $(3, -5)$.

5. Determinar el valor de k para que la recta

$$4x + 5y + k = 0$$

   forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo de área igual a $2\frac{1}{2}$ unidades cuadradas.

6. Hallar las ecuaciones

   (a) de las rectas que pasan por el punto $(2, -1)$ y que forman cada una un ángulo de $45°$ con la recta

$$2x - 3y + 7 = 0,$$

   (b) y de la recta que pasa por el punto (a, b) y por la intersección de las rectas

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1.$$

7. Una recta es tangente a un círculo de centro en el origen y radio 3. Si el punto de tangencia es $(2, -\sqrt{5})$, hállese la ecuación de la tangente en la forma normal.

8. Hallar la forma normal de la ecuación de la recta que es paralela a la recta

$$2x - 3y + 7 = 0$$

y determina sobre el eje x el segmento -9.

9. Los vértices de un triángulo son $A(-2, 3)$, $B(5, 5)$ y $C(4, -1)$. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo interior ACB.

10. Demostrar, analíticamente, que en un triángulo cualquiera las bisectrices de los ángulos interiores se cortan en un punto que equidista de los tres lados. este punto se llama *incentro*.

11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 6)$ y tal que la suma algebraica de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados (intercepciones) es igual a 2.

12. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son $A(-1, 1)$, $B(3, 5)$ y $C(5, -3)$.

13. Reducir las ecuaciones siguientes a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia. Si la ecuación representa una circunferencia, hallénse su centro y su radio.

    (a) $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y = 15$,

    (b) $36x^2 - 108y = -36y^2 - 48x - 97$,

    (c) $x^2 - 8x = -y^2 - 6y - 29$.

14. Hallar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos $(6, 2)$, $(8, 0)$ y cuyo centro está sobre la recta

$$3x + 7y + 2 = 0.$$

Represente en el plano xy los lugares geométricos correspondientes al círculo y la recta.

15. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$$

en el punto $(3, 5)$.

16. Transforme la ecuación

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0$$

trasladando los ejes coordenados al nuevo origen $(1, 2)$. Trace el lugar geométrico y los dos sistemas de ejes.

17. Transforme la ecuación

$$2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4$$

girando los ejes coordenados un ángulo de $30°$. Trace el lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

18. Mediante una rotación de los ejes coordenados, transforme la ecuación

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$$

en otra que carezca del término cruzado xy. Trace su lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

19. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $(3, 4)$ y cuyo foco es el punto $(3, 2)$. Hallar también la ecuación de su directiriz y la longitud de su lado recto.

20. Demostrar que la ecuación

$$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$$

representa una parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

21. Demostrar que la tangente a la parábola

$$(y - k)^2 = 4p(x - h),$$

de pendiente m $(m \neq 0)$, tiene por ecuación

$$y = mx - mh + k + \frac{p}{m}.$$

22. Los véretices de una elipse tienen por coordenadas $(-3, 7)$ y $(-3, -1)$, y la longitud de cada lado recto es 2. Hallar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

23. La ecuación de una elipse es

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0.$$

reduzca esta ecuación a la forma ordinaria y determine las cordenadas del centro, de los vértices y de los focos; calcule la longitud del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto y la excentricidad.

24. Demostrar que la ecuación de la tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

en el punto $P(x_1, y_1)$ es

$$\frac{x_1}{b^2}x + \frac{y_1}{a^2}y = 1.$$

25. Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(0, 3)$ y $V'(0, -3)$, y sus focos son los puntos $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$. Hallar la ecuación de la hipérebola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad y la longitud de cada lado recto.

26. Dada la ecuación de la hipérbola

$$x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$$

redúzcala a su segunda forma ordinaria. Determine también las coordenadas del centro, vértices, y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, y del lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas.

27. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola

$$x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$$

que son paralelas a las recta

$$4x - 4y + 11 = 0.$$

28. En los siguientes incisos, determine la naturaleza de la cónica que representa la ecuación dada, y reduzca la ecuación a su forma canónica por transformación de coordenadas. Trazar el lugar geométrico, cuando exista, y todos los sistemas de ejes coordenados

    (a) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0,$
    (b) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = 0,$
    (c) $3x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 16y - 12 = 0,$
    (d) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0.$

29. Dados los lugares geométricos

   (a) cuya ecuación rectangular es

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0,$$

   hállela en la forma polar; y

   (b) cuya ecuación polar es

$$r = \frac{2}{1 - \cos\theta},$$

   encuéntrela en la forma rectangular.

2.3. Cálculo diferencial e integral de una variable

1. Dadas las funciones

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, encuentre $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(f/g)(x)$;

   (b) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ f)(x)$ y $(g \circ g)(x)$. ¿Es cierto que $[f \circ (g + h)](x) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x)$?;

   (c) $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$, encuentre $f(g(h(x)))$;

   (d) $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, determine su paridad y encuentre sus correspondientes inversas.

   En los todos los casos determine tanto el dominio como el contradominio de cada una de las funciones involucradas y de las resultantes, así como sus gráficas en el plano cartesiano.

2. Determine el dominio, el contradominio y las gráficas correspondientes de las funciones

   (a)

$$f(x) = |x|,$$

   (b)

$$g(x) = \frac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 9)}{(x^2 + x - 12)(x + 3)},$$

   (c)

$$h(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases},$$

(d)
$$v(x) = [[x]]\,,$$
en donde $[[x]]$ simboliza el mayor entero menor que o igual a x; es decir, $[[x]] = n$ si $n \leq x < n+1$, donde n es un entero.

3. Una definición "intuitiva" del límite de una función es la siguiente:

   El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L, y se denota como
$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$
   si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como deseemos) tomando a x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

   Mediante la definición dada, haga una conjetura sobre el valor de

   (a)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1};$$
   (b)
$$\lim_{x\to 1} f(x), \qquad \text{con} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases};$$
   (c)
$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2};$$
   En todos los casos evalúe las funciones correspondientes para distintos valores de la variable independiente cercanos al valor a e indíquelos en una tabla.

4. Una definición "rigurosa" del límite de una función es la siguiente:

   Sea f una función definida en todo número de algún intervalo abierto I que contenga a a, excepto, posiblemente el número a mismo. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L, y se escribe
$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$
   si el siguiente enunciado es verdadero: Dada cualquir $\epsilon > 0$, sin importar cuán pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

   Mediante la definición dada, demuestre que

   (a)
$$\lim_{x\to 3} (4x-7) = 5,$$
   (b)
$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4,$$

(c)
$$\lim_{t\to 7} \frac{8}{t-3} = 2.$$

5. Halle el valor de los límites siguientes, y cuando sea posible, indique los teoremas de límite que se empleen.

   (a)
   $$\lim_{x\to 5} \left(2x^2 - 3x + 4\right),$$

   (b)
   $$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x},$$

   (c)
   $$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}.$$

6. Sean las funciones

   (a)
   $$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

   Trace la gráfica de h y determine si cada uno de los siguientes límites existen: $\lim_{x\to 1^-} h(x)$, $\lim_{x\to 1^+} h(x)$ y $\lim_{x\to 1} h(x)$.

   (b)
   $$j(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ 5 - x & \text{si } x > 3 \end{cases}.$$

   Trace la gráfica de j y halle, si existen, cada uno de los siguientes límites: $\lim_{x\to -3^-} j(x)$, $\lim_{x\to -3^+} j(x)$, $\lim_{x\to 3^-} j(x)$ y $\lim_{x\to 3^+} j(x)$.

7. Halle
   $$\lim_{x\to 4^-} \frac{[[x]] - 4}{x - 4}.$$

8. Dadas las funciones

   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   determine los números en los cuales f es continua, y

   (b)
   $$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4}, & \text{para } x \neq \pm 2 \\ 3, & \text{para } x = \pm 2 \end{cases}$$

   diga si presenta discontinuidades.

9. Dada la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{3+x}}.$$

Determine su dominio y si es continua o discontinua en los intervalos $(-3,2)$, $[-3,2]$, $[-3,2)$ y $(-3,2]$. Considere que $f(x) = g(h(x))$, en donde $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = (2-x)\,/\,(3+x)$.

10. Determinar

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\tan^2 x}{x^2}$$

si es que existe.

11. Sea f definida por

$$f(x) = \left|1 - x^2\right|.$$

(a) Trazar la gráfica de f.
(b) Demostrar que f es continua en 1.
(c) Determinar si f es diferenciable en 1.

12. Calcule las derivadas

(a)

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{2y^3+4}{x^2-4x+1}\right),$$

(b)

$$D_x\left[\frac{x^3+1}{x^2+3}\left(x^2-2x^{-1}+1\right)\right].$$

13. Dos partículas A y B se desplazan a la derecha sobre una recta horizontal. parten de un punto O, s metros es la distancia dirigida de la partícula desde O a los t segundos y las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} s &= 4t^2+5t \qquad \text{para la partícula } A, \\ s &= 7t^2+3t \qquad \text{para la partícula } B. \end{aligned}$$

Si $t=0$ al principio, ¿para qué valores de t la velocidad de la partícula A excederá la velocidad de la partícula B?

14. Calcule las derivadas

(a)

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1+seny}{1-seny}\right),$$

(b)

$$D_t \left(\frac{2\csc t - 1}{\csc t + 2} \right).$$

15. Calcule las derivadas de las siguientes funciones

(a)

$$f(x) = sen(\cos(\tan(x))),$$

(b)

$$g(x) = e^{sen(x^2)}.$$

(c)

$$y = x^x,$$

(d)

$$y = xy - \ln x.$$

(e)

$$\frac{d^3}{dx^3} \left(2senx + 3\cos x - x^3 \right),$$

(f)

$$D^{27} \cos x.$$

16. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}.$$

Hallar

(a) el dominio de f,
(b) las intercepciones y (u ordenadas en el origen) y las x (o abcisas en el origen) de la gráfica,
(c) si hay simetría con respecto al eje y y al origen,
(d) los extremos relativos de f,
(e) los intervalos donde f es creciente,
(f) los intervalos donde f es decreciente,
(g) dónde la gráfica es cóncava hacia arriba,
(h) dónde la gráfica es cóncava hacia abajo,
(i) la pendiente de cualquier tangente de inflexión, y
(j) las asíntotas horizontales y verticales.

17. El *teorema de Rolle* establece que:

Si f es una función tal que

i) sea continua en el intervalo cerrado $[a, b]$,

ii) sea diferenciable en el intervalo abierto (a, b),

iii) $f(a) = f(b) = 0$;

entonces, existe un número c en el intervalo abierto (a, b), tal que

$$f(c) = 0.$$

(a) El recíproco del *teorema de Rolle* no es verdadero. Elabore un ejemplo de una función para la cual la conclusión del *teorema de Rolle* sea verdadera y para la cual

1. la condición *i)* no se cumpla, pero las condiciones *ii)* y *iii)* si se cumplan,
2. la condición *ii)* no se cumpla, pero las condiciones *i)* y *iii)* si se cumplan,
3. la condición *iii)* no se cumpla, pero las condiciones *i)* y *ii)* si se cumplan. Trace la gráfica que muestre la recta tangente horizontal para cada caso.

(b) Verifique el *Teorema de Rolle*, para

$$f(x) = x^2(1 - x)^2,$$

en el intervalo $[0, 1]$.

18. Suponga que $s = f(t)$ es una ecuación del movimiento de una partícula que se desplaza en línea recta, donde f cumple la hipótesis del *teorema del valor medio*. Demuestre que la conclusión de dicho teorema asegura que habrá algún instante durante cualquier intervalo de tiempo en el que la velocidad instantánea igualará a la velocidad promedio durante ese intervalo de tiempo.

19. Dada
$$f(x) = x^r - rx + 5,$$
donde $r > 0$ y $r \neq 1$, demuestre que

(a) si $0 < r < 1$, f tiene un valor máximo relativo en 1;

(b) si $r > 1$, f tiene un valor mínimo relativo en 1.

20. Determine la distancia más corta del punto $(9/2, 0)$ a la curva $y = \sqrt{x}$.

21. Si
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1},$$
demuestre que la gráfica de f tiene tres puntos de inflexión colineales. Trace la gráfica.

22. Calcule las derivadas de las siguientes funciones en el punto indicado.

    (a) $(3x-4)/(2x+3)$, en $x=1$.

    (b) $(6x-4)^{\frac{1}{3}}$, en $x=2$.

23. Sin calcular primitivas, evalúa la integral

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx.$$

24. Encuentra la derivada respecto de x de las funciones

    (a)
$$f(x) = \int_{1}^{x^2} \sec t dt,$$

    (b)
$$h(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t} sent dt.$$

25. Encuentre el intervalo sobre el cual la curva

$$y = \int_{0}^{x} \frac{1}{1+t+t^2} dt,$$

    es cóncava hacia arriba.

26. El punto $(3,2)$ está ubicado en una curva y en cualquier punto (x,y) en la curva, la recta tangente tiene una pendiente igual a $2x-3$. Formule una ecuación de la curva.

27. El volumen de un globo aumenta de acuerdo con la fórmula

$$\frac{dV}{dt} = \sqrt{t+1} + \frac{2}{3}t,$$

    dónde V es el volumen (en cm^3) del globo a los t segundos. Si $V = 33cm^3$ cuando $t = 3s$, obtenga

    (a) una fórmula para V en términos de t;

    (b) el volumen del globo a los 8 segundos.

28. Aplique la *regla de L'Hospital* para probar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 sen\frac{1}{x}}{senx} = 0.$$

29. Aplique el *Teorema de Taylor*

   (a) para probar que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

   (b) para escribir a $senx/x$ como una serie de potencias y calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}.$$

3. Algunos ejemplos de evaluaciones diagnósticas

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA
(OPCIÓN B)

Semestre 2014-I

Fecha: ____________

Nombre: ____

Ocupación (o profesión) y último grado de estudios: _____________________

Indicaciones. Resuelva correctamente cada uno de los siguientes ejercicios; al escribir sus respuestas, exprese con toda claridad sus ideas, e indique las operaciones que efectœe y los conceptos matemáticos que utilice.

1. Un padre tiene dos hijos, el grande cuatro años mayor que el primero. Dentro de 23 años, el padre tendrá tantos años como la suma de las edades de sus hijos. ¿Qué edad tiene cada uno, si sabemos que actualmente el doble de la edad del padre es igual a nueve veces la edad del mayor más cuatro veces la del menor?

2. Para calcular la altura de la torre Eiffel nos situamos a 74 m de la base de la torre. Si observamos la torre con un ángulo de elevación de 70°, ¿cuánto mide la torre?

3. Hallar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos $(6, 2)$, $(8, 0)$ y cuyo centro está sobre la recta
$$3x + 7y + 2 = 0.$$
Represente en el plano xy los lugares geométricos correspondientes al círculo y la recta.

4. Dada la función
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}.$$
Hallar
   (a) el dominio de f,

(b) las intercepciones y (u ordenadas en el origen) y las x (o abcisas en el origen) de la gráfica,

(c) si hay simetría con respecto al eje y y al origen,

(d) los extremos relativos de f,

(e) los intervalos donde f es creciente,

(f) los intervalos donde f es decreciente,

(g) dónde la gráfica es cóncava hacia arriba,

(h) dónde la gráfica es cóncava hacia abajo,

(i) la pendiente de cualquier tangente de inflexión, y

(j) las asíntotas horizontales y verticales.

5. Encuentre el intervalo sobre el cual la curva

$$y = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} dt,$$

es cóncava hacia arriba.

Comprensión de textos en inglés

Lea el siguiente texto[2] y responda las preguntas al final del mismo:

Whatever our professional preoccupations may be, we cannot escape the feeling that we live in an age of transition, an age that demands constructive modification of our environment. We must find and explore new resources, must understand our environment better, and must achieve a less destructive coexistence with nature. The time scale of the qualitative modifications that are required to achieve these goals is not comparable to the immense time spans involved in biological or geological evolution. Rather, it is of the order of a decade. Thus the modifications that must be made interfere with our own lives and the lives of the next generation.

We cannot anticipate the outcome of this period of transition, but it is clear that science is bound to play an increasingly important role in our effort to meet the challenge of understanding and reshaping our global environment. It is a striking fact that at this crucial moment science is going through a period of reconceptualization.

The two great revolutions in physics at the beginning of this century were quantum mechanics and relativity. Both started as corrections to classical mechanics, made necessary once the roles of the universal constants c (the velocity of light) and h (Planck's

[2]Este texto en inglés fue extraído del libro *Exploring Complexity: an introduction,* de Gregoire Nicolis e Ilya Prigogine.

constant) were discovered. Today, both of these areas of physics have taken an unexpected "temporal" turn: Quantum mechanics now deals in its most interesting part with the description of unstable particles and their mutual transformations. Relativity, which started as a a geometrical theory, today is mainly associated with the thermal history of the universe.According to the author:

1. What are the goals we must achieve in this age of transition? Give your answer in Spanish.
2. How long does it take to achieve the qualitative modifications required in this age of transition? Give your answer in Spanish.
3. What does quantum mechanics deal with nowadays? Give your answer in Spanish.
4. What is relativity associated with today? Give your answer in Spanish.
5. Make a brief sumary of the text (80 – 100 words) in Spanish.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA
(OPCIÓN B)

Semestre 2014-I

Fecha: ____________

Nombre: ____

Ocupación (o profesión) y último grado de estudios: ______________________

Indicaciones. Resuelva correctamente cada uno de los siguientes ejercicios; al escribir sus respuestas, exprese con toda claridad sus ideas, e indique las operaciones que efectúe y los conceptos matemáticos que utilice.

1. Lorenzo y Miguel fueron a la tienda a comprar lo necesasrio para una excursión. Llevaban un total de \$300 para gastos. Miguel gastó 9/10 de su dinero, Lorenzo 4/5 del suyo y regresaron a casa con un total de \$40. ¿Cuánto llevaba cada uno al ir a la tienda?

2. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esta abertura?

3. Dada la ecuación
$$5x^2 - (k+2)x + 7k + 1 = 0,$$
encuentre el valor de k de manera que
   (a) una raíz sea 3,
   (b) una raíz sea la negativa de la otra raíz.

4. Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(0,3)$ y $V'(0,-3)$, y sus focos son los puntos $F(0,5)$ y $F'(0,-5)$. Hallar la ecuación de la hipérebola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad y la longitud de cada lado recto.

5. El volumen de un globo aumenta de acuerdo con la fórmula
$$\frac{dV}{dt} = \sqrt{t+1} + \frac{2}{3}t,$$
dónde V es el volumen (en cm^3) del globo a los t segundos. Si $V = 33cm^3$ cuando $t = 3s$, obtenga

(a) una fórmula para V en términos de t;

(b) el volumen del globo a los 8 segundos.

Comprensión de textos en inglés

Lea el texto siguiente[3] y responda las preguntas que vienen a continuación:

The New Megalopolis:

China isn't the world's most ferocious new economic competitor–the exploding east-coast corridor, from Beijing to Shanghai, is. India as a whole is not developing high-tech industries and attracting jobs, but the booming mega-region stretching from Bangalore to Hyderabad is. Across the world, in fact, nations don't spur growth so much as dynamic regions–modern versions of the original "megalopolis," a term coined by the geographer Jean Gottman to identify the sprawling Boston-New York-Washington economic power corridor. The New Megas are the real economic organizing units of the world, producing the bulk of its wealth, attracting a large share of its talent and generating the lion's share of innovation. They take shape as powerful complexes of multiple cities and suburbs, often stretching across national borders–forming a vast expanse of trade, transport, innovation and talent. Yet, though the rise of regions has been apparent for more than a decade, no one has collected systematic information on them–not the World Bank, not the IMF, not the United Nations, not the global consulting firms. That's why my team and I set about building a world map of the New Megas shaped by satellite images of the world at night, using light emissions to identify the outlines of each region, and additional data in categories such as population and economic growth to chart their relative peak strengths and dynamism. The result is the topographical maps you see above.

The maps make it clear that the global economy takes shape around perhaps 20 great Megas–half in the United States and the rest scattered throughout the world. These regions are home to just 10 percent of total world population, 660 million people, but produce half of all economic activity, two thirds of world-class scientific activity and three quarters of global innovations. The great urbanologist Jane Jacobs was the first to describe why megalopolises grow. When people cluster in one place, they all become more productive. And the place itself becomes much more productive, because collective creativity grows exponentially. Ideas flow more freely, are honed more sharply and can be put into practice more quickly. Later, Nobel Prize-winning economist Robert Lucas dubbed these forces "human capital externalities," and explained why they seem to override "the usual economic forces," like prices: "What can people be paying Manhattan or downtown Chicago rents for, if not to be around other people?" There is, however, a tipping point. The forces of price and congestion begin pushing people away from the center. But make no mistake, this has nothing to do with the "decentralization of work," as many have argued. The huge economic advantages of clustering still guide the process, which is why second cities emerge near big cities or in the corridors between them, not in the middle of

[3]Este texto en inglés fue extraído de la revista *Newsweek* (July 3-July 10, 2006).

nowhere. The biggest Mega in economic terms is the original, the Boston-to-Washington corridor. In 1961 it was home to about 32 million people; today its population has risen to 55 million, more than 17 percent of all Americans. The region generates $2.5 trillion in economic activity, making it the world's fourth largest economy, bigger than France or the United Kingdom. Next in line is Chi-Pitts, the great Midwestern Mega running from Chicago to Detroit, Cleveland and Pittsburgh, with $2.3 trillion in economic activity. Three of the power centers of the U.S. economy even stretch beyond American borders: So-Cal runs from Los Angeles to San Diego across the Mexican border to Tijuana; Tor-Buff-Chester sprawls from Toronto to Rochester, and Cascadia from Portland, Oregon, to Vancouver.

1. Give your interpretation of the author's conception of "megalopolis"?
2. Why did the team led by the author of the article build maps of the New Megas?
3. What conclusions can be drawn from these maps?
4. List some megas in the continents of:
   (a) America
   (b) Europe
   (c) Asia
5. What were the criteria used by the author to classify New Megas?
6. What contributions have the New Megas made to scientific activity and global innovation (in percentages)?
7. According to the article, why have megalopolis been growing?